VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY MATICE

lineární prostor V_n
lineární zobrazení $V_n \to V_n$ ... lze vyjádřit: $L(\vec{x}) = \underset{(n,n)}{A} \cdot \vec{x}$

$\underbrace{\underline{A \cdot \vec{x}} = \lambda \cdot \vec{x} = \underline{\lambda \cdot E \cdot \vec{x}}}$

$\downarrow$

$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ ... homogenní systém lineárních rovnic
- má netriviální řešení, když $|A - \lambda E| = 0$

$|A - \lambda E|$ ... charakteristický polynom matice A

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ... kořeny charakteristického polynomu = = **vlastní čísla** matice A

λ_i: dosadíme do $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ $\to$ určíme **vlastní vektor** $\vec{x}_i$ příslušný k číslu λ_i

vlastní vektor = nenulový vektor, jehož směr se při transformaci (zobrazení) nemění

vlastní číslo daného vektoru = koeficient, o který se při transformaci změní velikost vektoru

Př: Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice A.

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

- vlastní čísla: $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(8-\lambda) - 4 = 40 - 8\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda-4)(\lambda-9) = 0$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 4}}, \ \underline{\underline{\lambda_2 = 9}}$

- vlastní vektory: $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$

$\underline{\lambda_1 = 4}$: $\begin{pmatrix} 5-4 & -2 \\ -2 & 8-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ \underline{-2x_2 + 4x_2 = 0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 = 2t \\ x_2 = t \end{array} \to$

$\to \underline{\underline{\vec{v}_1 = t \cdot (2, 1)^T}}$

$\underline{\lambda_2 = 9}$: $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ \underline{-2x_1 - x_2 = 0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = -2x_1 = -2s \end{array} \to$

$\to \underline{\underline{\vec{v}_2 = s \cdot (1, -2)^T}}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – lineárně nezávislé, báze $\mathbb{R}^2$ – aritmetický lin. prostor

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

• $|A-\lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot(-1-\lambda)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2-\lambda\\ 1 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\cdot(-1-\lambda)\cdot(2+\lambda) = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = 1,\; \lambda_2 = -1,\; \lambda_3 = -2$$

• $(A-\lambda E)\cdot\vec{x} = \vec{o}$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
$3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \quad /:3$
$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

GEM: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} /\cdot(-2)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_3 - x_2 = 2t$
$\Rightarrow x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = t$

$\vec{v}_1 = t\cdot(2, 1, 1)^T$

$\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$
$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-3) \\ + \; /\cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 = s$
$\Rightarrow x_2 = 0$
$x_1 = s$

$\vec{v}_2 = s\cdot(1, 0, 1)^T$

$\lambda_3 = -2$: $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
$3x_1 - 3x_2 = 0 \quad /:3$
$x_1 + x_2 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 = -p$
$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 = p$
$x_1 = p$

$\vec{v}_3 = p\cdot(1, -1, 1)^T$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ – lineárně nezávislé
– báze $\mathbb{R}^3$